Limita a spojitost

Příklad 1. Udejte příklady poslounosti, pro něž $\lim a_n = \lim b_n = \infty$, avšak $\lim(a_n - b_n)$ je: (a) ∞, $(b)\ -\infty$, $(c)\ a \in \mathbf{R}$, (d) neexistuje

Příklad 2. Udejte příklady posloupností, pro něž $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = \infty$ ale $\lim(a_n \cdot b_n)$ je: (a) ∞, $(b)\ 0$, $(c)\ a \in \mathbf{R}$, (d) neexistuje

Příklad 3. Vypočtěte laskavě limity posloupností (je nabíledni, že všude $n \to \infty$):

$$\lim \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = 1,\ \lim \frac{1+(-1)^n}{2} = \text{limita neexistuje},$$

$$\lim \frac{3n^2 - 123n - 1000}{2n^2 + n} = \frac{3}{2},\ \lim \frac{-n^2}{1000n+2} = -\infty,\ \lim \frac{n^3 + 12n^2 + 12n + 12}{n^4 - 1} = 0,$$

$$\lim \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = 1,\ \lim \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} = 1,\ \lim \frac{1}{(1-n)^2} = 0,$$

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0,\ \lim \frac{n^n}{n!} = \infty,\ \lim \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Příklad 4. Spočtěte zcela triviální limity (načrtněte si předem graf $f(x)$):

$$\lim_{x\to 0+} f(x),\quad \lim_{x\to 0-} f(x),\quad \lim_{x\to 0} f(x),\quad \lim_{x\to\infty} f(x),\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

kde

$$f(x) = x^2,\quad f(x) = \frac{1}{x},\quad f(x) = \frac{|x|}{x},\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Vypočtěte dále

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x,\quad \lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x$$

Příklad 5. Vypočtěte následující triviální limity:

$$\lim_{x\to\infty} \sin x = \text{limita neexistuje},\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,\quad \lim_{x\to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x = 0,\quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi \quad \lim_{x\to 0} 3^{-x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \pi^{-x} = 0,\quad \lim_{x\to-\infty} \log x^2 = \infty,\quad \lim_{x\to 0+} \log|x| = -\infty$$

Příklad 6. Rychle vypočtěte následující limity (limity spočtěte zdravým rozumem, tj. bez L' Hospitalova pravidla).

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4,\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1} = \frac{3}{4},\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x+7} = \infty,\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x^3 - 8x + 5} = 0,\quad \lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3} = \infty,\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4+1}} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{1}{2},\quad \lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = -2,\quad \lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = -\frac{1}{56},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\frac{3}{4},\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\frac{3}{2},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2 x}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\log\frac{x^2+x+3}{x^2-2}=0,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2+1}+\frac{x}{\sin x}\right)=4,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{2}{x^2}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin^3 x}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}=1,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=3,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}=\frac{3}{5},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=3,$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})=1,\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0,\ \lim_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})=0,$$

$$\lim_{x\to 1_+}\frac{x}{x-1}=\infty,\quad \lim_{x\to 1_+}\frac{x+1}{x-1}=\infty,\quad \lim_{x\to -\frac{1}{2}_+}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{4}{3},\quad \lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=12,\quad \lim_{x\to 1_-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty$$

Příklad 7. Ukažte, že následující rovnice má řešení a nalezněte nějaký interval, který toto řešení obsahuje.
(a) $\sqrt{x^4+1}\cdot\ln(x^2+3)-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\sin^2 x}=3$, (b) $\mathrm{e}^x-6x=3$.

Příklad 8. Udejte příklad dvou funkcí nespojitých v bodě 0, jejichž součet je funkce spojitá v bodě 0.

Příklad 9. Udejte příklad funkcí $f(x)$ a $g(x)$, které, jsou nespojité, zatímco složená funkce $f[g(x)]$ je spojitá .

M. Doupovec